



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & StrategyUnit

Τεχνικές Προβλέψεων

Προβλέψεις

Κινητοί Μέσοι Όροι για πρόβλεψη

Περίοδος	Δεδομένα	ΚΜΟ(3)	ΚΜΟ(5)
1	106,5		
2	109,2		
3	117,8		
4	117,2	111,17	
5	116,9	114,73	
6	118,7	117,30	113,52
7	115,6	117,60	115,96
8	119,0	117,07	117,24
9	134,7	117,77	117,48
10	130,4	123,10	120,98
11	126,2	128,03	123,68
12		130,43	125,18

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=t-k+1}^t Y_i$$

Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία εξομαλύνει τα ιστορικά δεδομένα.
- Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δεδομένων, με την χρήση συντελεστών βαρύτητας.
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Οι συντελεστές βαρύτητας μειώνονται με εκθετικό τρόπο, όσο παλαιότερα είναι τα δεδομένα.
- Στόχος η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις.

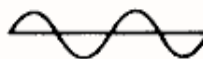
Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoothing)

- Χρησιμοποιείται ευρέως για βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό.
- Είναι σχετικά εύκολη στην χρήση.
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και χρόνο υπολογισμού.
- Είναι ικανοποιητικά ακριβής σε σχέση με πολυπλοκότερες μεθόδους πρόβλεψης.

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

- Τέσσερα (4) πρότυπα τάσης.
 - Σταθερού Επιπέδου
 - Γραμμικής τάσης
 - Εκθετικής τάσης
 - Φθίνουσας τάσης
- Τρία (3) πρότυπα εποχιακότητας.
 - Χωρίς εποχιακότητα
 - Προσθετική εποχιακότητα
 - Πολλαπλασιαστική εποχιακότητα

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

	Nonseasonal	Additive Seasonality	Multiplicative Seasonality
Constant Level			
Linear Trend			
Exponential Trend			
Damped Trend			

• Σταθερού Επιπέδου

- ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
- ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.

• Γραμμικής τάσης

- ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.

• Εκθετικής τάσης

- ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
- ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.

• Φθίνουσας τάσης

- ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

- **Σταθερού Επιπέδου**

- ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
- ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.

- **Γραμμικής τάσης**

- ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.

- **Εκθετικής τάσης**

- ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
- ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.

- **Φθίνουσας τάσης**

- ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα Βιβλίου σελ. 2.18

Χρόνος t	Δεδομένα X_t	Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$	Σφάλμα e_t	Επίπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$
---------------	-------------------	------------------------------------	-----------------	---

0				$S_0 =$	585
1	545	585	-40	$S_1 = 585 + 0.4(-40)$	= 569
2	635	569	66	$S_2 = 569 + 0.4(6.6)$	= 595.4
3	420	595,4	-175,4	$S_3 = 595.4 + 0.4(-175.4)$	= 525.2
4	716	525,2	190,8	$S_4 = 525.2 + 0.4(190.8)$	= 601.5
5	699	601,5	97,5	$S_5 = 601.5 + 0.4(97,5)$	= 640.5
6	681	640,5	40,5	$S_6 = 640,5 + 0.4(40.5)$	= 656.5
7	763	656,5	106,3	$S_7 = 656.5 + 0.4(106.3)$	= 699.2
8	778	699,2	78,8	$S_8 = 699.2 + 0.4(78.8)$	= 730.5
9	690	730,5	-40,5	$S_9 = 730.5 + 0.4(-40.5)$	= 711.4
10	707	711,4	-7,4	$S_{10} = 711.4 + 0.4(-7.4)$	= 711.5
11	716	711,5	4,5	$S_{11} = 711.5 + 0.4(4.5)$	= 713.3
12		713,3			

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

Μοντέλου Σταθερού Επιπέδου (0)

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$



$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

Μοντέλου Σταθερού Επιπέδου (I)

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 F_{t-1}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1} , κοκ , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^4 Y_{t-4} + \dots \\ \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (II)

Από την εξίσωση (4) παρατηρούμε

- Ότι οι συντελεστές (βάρη) των των ιστορικών δεδομένων Y μειώνονται εκθετικά για αυτό και το όνομα της μεθόδου «εκθετική εξομάλυνση».
- Ότι ο τελευταίος όρος είναι ο $(1-\alpha)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για $t = 11$, ισχύει :

$$(1-\alpha)^t = 0.3138 \text{ αν } \alpha = 0.1$$

$$(1-\alpha)^t = 0.0004 \text{ αν } \alpha = 0.5$$

$$(1-\alpha)^t = 0.0000 \text{ αν } \alpha = 0.9$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (III)

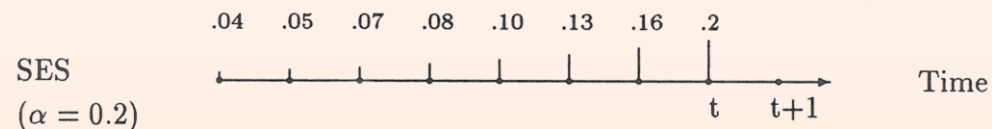
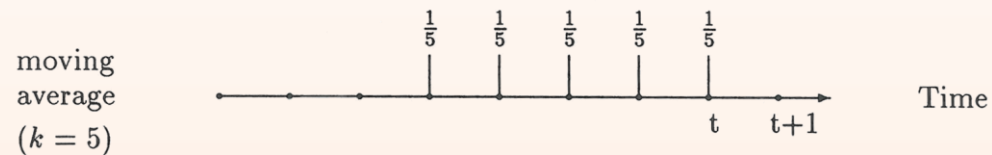
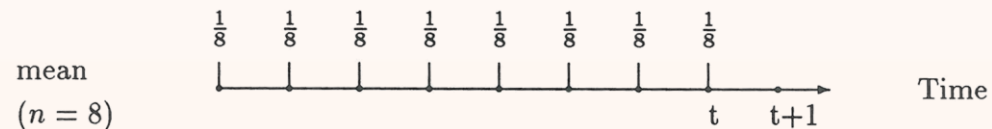
- Όσο μικρότερη τιμή του α επιλέξουμε τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα επιλέξουμε F_1 .
- Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t , οπότε τόσο μικρότερο είναι το βάρος του F_1 .

Π.χ. για $t = 12$ και $\alpha = 0.1$ το βάρος ισούται με 0.2824

για $t = 24$ και $\alpha = 0.1$ το βάρος ισούται με 0.0798

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (IV)

Weight assigned to:	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
Y_t	0.2	0.4	0.6	0.8
Y_{t-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
Y_{t-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
Y_{t-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
Y_{t-4}	$(0.2)(0.8)^4$	$(0.4)(0.6)^4$	$(0.6)(0.4)^4$	$(0.8)(0.2)^4$



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (V)

- Πρέπει να επιλέγεται με προσοχή η πρώτη πρόβλεψη και η παράμετρος εξομάλυνσης.
 - ✓ Η *πρώτη πρόβλεψη* έχει μεγάλη επίδραση στις μελλοντικές προβλέψεις.
 - ✓ Η *παράμετρος εξομάλυνσης* επηρεάζει άμεσα την σταθερότητα των προβλέψεων.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VI)

Εύρεση Αρχικής Πρόβλεψης

- Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:
 - Μέσος όρος των παρατηρήσεων
 - Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
 - Πρώτη παρατήρηση
 - Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος $[0,1]$.
- Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α , για κάθε τιμή του in sample

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VIII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- Ένας τρόπος για τη βελτιστοποίηση του α είναι ο υπολογισμός του MSE για κάποιο αριθμό τιμών του α (πχ 0.1, 0.2, ..., 0.9) και επιλογή εκείνου που δίνει το μικρότερο σφάλμα MSE.
- Εναλλακτικός τρόπος είναι η χρήση ενός μη γραμμικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (I)

t	Y
0	
1	200
2	135
3	195
4	197,5
5	310
6	175
7	155
8	130
9	220
10	277,5
11	235
12	???

➤ Μηνιαία δεδομένα t

➤ Αριθμός μηνιαίων φορτώσεων

Y_t

Ζητείται η πρόβλεψη Δεκεμβρίου.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (II)

t	Y	F	e	$S = F + a \cdot e$	$S = a \cdot Y + (1-a) \cdot F$	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	$167,5 + 0.2 \cdot 32,5$	$0.2 \cdot 200 + 0.8 \cdot 167,5$	174,0
2	135	174,0	-39,0	$174 + 0.2 \cdot -39$	$0.2 \cdot 135 + 0.8 \cdot 174$	166,2
3	195	166,2	28,8	$166,2 + 0.2 \cdot 28,8$	$0.2 \cdot 195 + 0.8 \cdot 166,2$	172,0
4	197,5	172,0	25,5	$172 + 0.2 \cdot 25,5$	$0.2 \cdot 197,5 + 0.8 \cdot 172$	177,1
5	310	177,1	132,9	$177,1 + 0.2 \cdot 132,9$	$0.2 \cdot 310 + 0.8 \cdot 177,1$	203,7
6	175	203,7	-28,7	$203,7 + 0.2 \cdot -28,7$	$0.2 \cdot 175 + 0.8 \cdot 203,7$	197,9
7	155	197,9	-42,9	$197,9 + 0.2 \cdot -42,9$	$0.2 \cdot 155 + 0.8 \cdot 197,9$	189,3
8	130	189,3	-59,3	$189,3 + 0.2 \cdot -59,3$	$0.2 \cdot 130 + 0.8 \cdot 189,3$	177,5
9	220	177,5	42,5	$177,5 + 0.2 \cdot 42,5$	$0.2 \cdot 220 + 0.8 \cdot 177,5$	186,0
10	277,5	186,0	91,5	$186 + 0.2 \cdot 91,5$	$0.2 \cdot 277,5 + 0.8 \cdot 186$	204,3
11	235	204,3	30,7	$204,3 + 0.2 \cdot 30,7$	$0.2 \cdot 235 + 0.8 \cdot 204,3$	210,4
12	???	210,4				

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

$\alpha = 0.5$

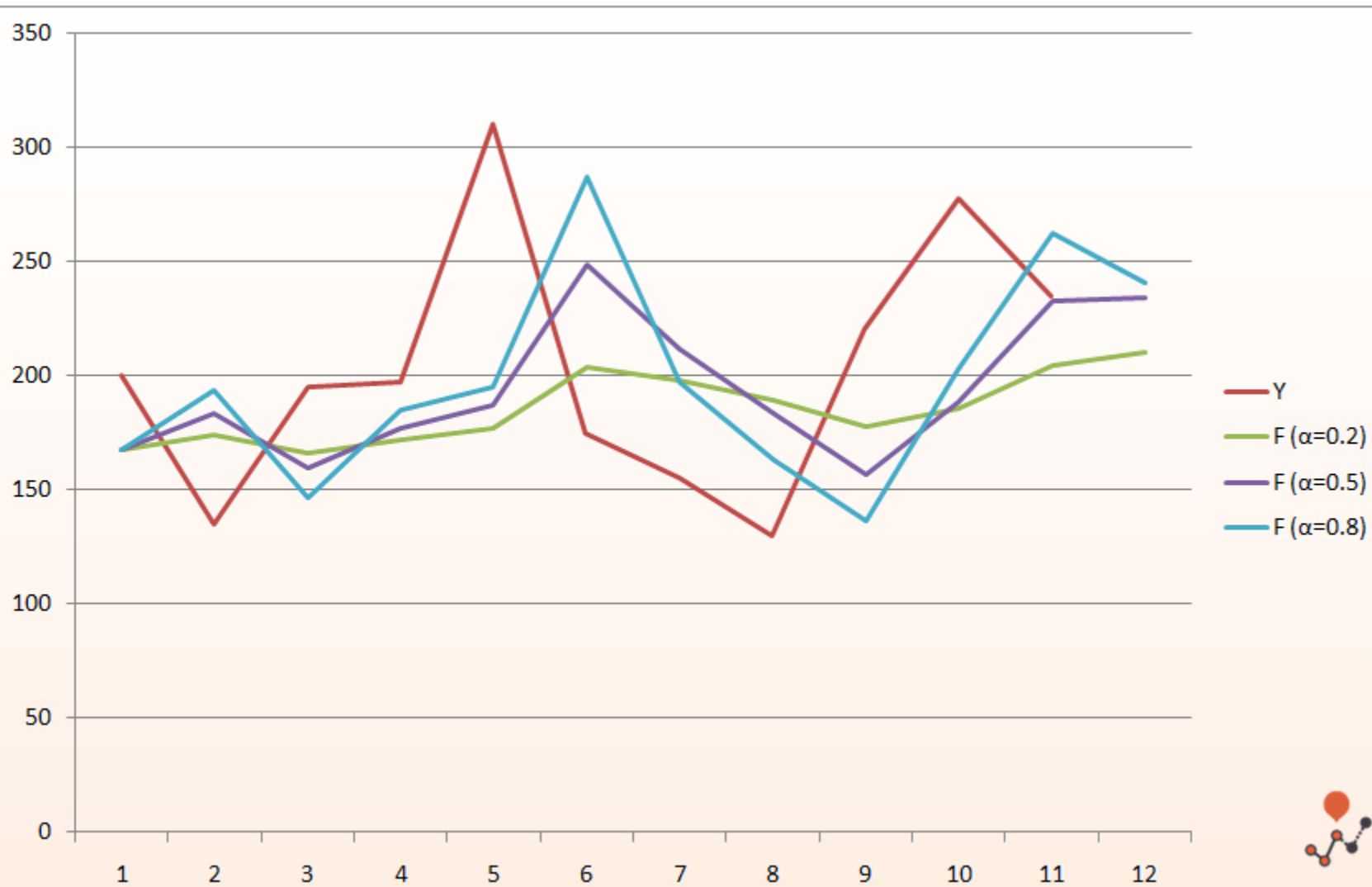
t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	183,8
2	135	183,8	-48,8	159,4
3	195	159,4	35,6	177,2
4	197,5	177,2	20,3	187,3
5	310	187,3	122,7	248,7
6	175	248,7	-73,7	211,8
7	155	211,8	-56,8	183,4
8	130	183,4	-53,4	156,7
9	220	156,7	63,3	188,4
10	277,5	188,4	89,1	232,9
11	235	232,9	2,1	234,0
12	???	234,0		

$\alpha = 0.8$

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	193,5
2	135	193,5	-58,5	146,7
3	195	146,7	48,3	185,3
4	197,5	185,3	12,2	195,1
5	310	195,1	114,9	287,0
6	175	287,0	-112,0	197,4
7	155	197,4	-42,4	163,5
8	130	163,5	-33,5	136,7
9	220	136,7	83,3	203,3
10	277,5	203,3	74,2	262,7
11	235	262,7	-27,7	240,5
12	???	240,5		

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (IV)



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (V)

- Η μεγαλύτερη τιμή του $\alpha = (0.8)$ εξομαλύνει πολύ λίγο το μοντέλο ενώ η μικρότερη $\alpha = (0.2)$ δίνει την καλύτερη εξομάλυνση.
- Αν το $\alpha = 1$, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται Naive, ενώ αν $\alpha = 0$ τότε η πρόβλεψή μας είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (VI)

t	Y	F ($\alpha=0.2$)	E	AE	APE	SAPE
1	200	167,5	32,50	32,50	0,163	0,177
2	135	174,0	-39,00	39,00	0,289	0,252
3	195	166,2	28,80	28,80	0,148	0,159
4	197,5	172,0	25,54	25,54	0,129	0,138
5	310	177,1	132,93	132,93	0,429	0,546
6	175	203,7	-28,65	28,65	0,164	0,151
7	155	197,9	-42,92	42,92	0,277	0,243
8	130	189,3	-59,34	59,34	0,456	0,372
9	220	177,5	42,53	42,53	0,193	0,214
10	277,5	186,0	91,52	91,52	0,330	0,395
11	235	204,3	30,72	30,72	0,131	0,140
12		210,4				

$\alpha=0.2$

$\alpha=0.5$

$\alpha=0.8$

19,51	50,41	0,25	0,25
12,08	54,39	0,27	0,27
8,30	58,13	0,29	0,29



FSU