



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & Strategy Unit

Τεχνικές Προβλέψεων

Επιλογή Μεθόδου
Συνδυασμός Μεθόδων
Παρακολούθηση

Η επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου πρόβλεψης εξαρτάται από:

- Το βαθμό που οι χρήστες αρκούνται στο να παράγουν ακριβείς προβλέψεις ή επιθυμούν να τις κατανοήσουν και να επηρεάσουν την πορεία των γεγονότων στο μέλλον
- Τα δεδομένα και τον τύπο τους (πλήθος, μήκος και συχνότητα χρονοσειρών)
- Τα χαρακτηριστικά των χρονοσειρών
- Τον ορίζοντα πρόβλεψης
- Τη συχνότητα πρόβλεψης - Υπολογιστικό κόστος

Επιλογή μεθόδου με βάση το σκοπό: πρόβλεψη ή ερμηνεία

Οι χρήστες έχουν ως **στόχο** να κατανοήσουν τις παραμέτρους που επιδρούν στο μέγεθος που πρόκειται να προβλέψουν, επηρεάζοντας την πορεία του

➤ Για παράδειγμα, όταν πρόκειται για πωλήσεις, ενδέχεται να θέλουν να λάβουν υπόψη παράγοντες που τις διαμορφώνουν, όπως:

- Η διαφήμιση
- Η μείωση τιμών και οι προσφορές (επιπλέον προϊόν, δώρο, μελλοντική έκπτωση)
- Ο ανταγωνισμός και ο «κανιβαλισμός» προϊόντων

Παράδειγμα:

- Μια μέθοδος πρόβλεψης χρονοσειρών μας δείχνει μια πτωτική τάση των πωλήσεων κατά 10%
- Μία μέθοδος παλινδρόμησης μας δείχνει ότι αν αυξήσουμε την διαφήμιση κατά 5%, οι πωλήσεις θα αυξηθούν κατά 12.5%
- Επομένως: ανάλογα με τον σκοπό της πρόβλεψής μας, και τους στόχους μας, επιλέγουμε μεθόδους πρόβλεψης χρονοσειρών ή μεθόδους επεξηγηματικών μεταβλητών

Επιλογή μεθόδου με βάση το σκοπό: πρόβλεψη ή ερμηνεία

Οι μέθοδοι χρονοσειρών αποτυπώνουν το πιο πιθανό σενάριο για το μέλλον, όπως αυτό διαμορφώνεται αποκλειστικά από τα παρελθοντικά δεδομένα (*business as usual*). Σε περίπτωση που ο αποφασίζων μπορεί και θέλει να επέμβει στο μέλλον, αλλάζοντας αυτήν την πραγματικότητα (*shock*), το μοντέλο πρόβλεψης θα πρέπει να του δίνει τη δυνατότητα να προσομοιώσει αυτές τις μεταβολές.

Η ερμηνεία είναι επίσης καθοριστική, ακόμα και μεταξύ μοντέλων που χρησιμοποιούν τα ίδια ακριβώς δεδομένα για την παραγωγή προβλέψεων

Παράδειγμα: Αν οι προβλεπόμενες πωλήσεις μιας εταιρείας, όπως αυτές προκύπτουν από τη μέθοδο Holt, εμφανίζουν πτωτική τάση, γνωρίζουμε ότι αυτό θα οφείλεται πιθανότατα σε κάποια πρόσφατη πτωτική πορεία τους. Αν η ίδια πρόβλεψη προέκυπτε από ένα νευρωνικό δίκτυο, δεν θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε το λόγο που αυτό συμβαίνει (*black-box approaches*).

Επιλογή μεθόδου ανάλογα με τον τύπο των δεδομένων

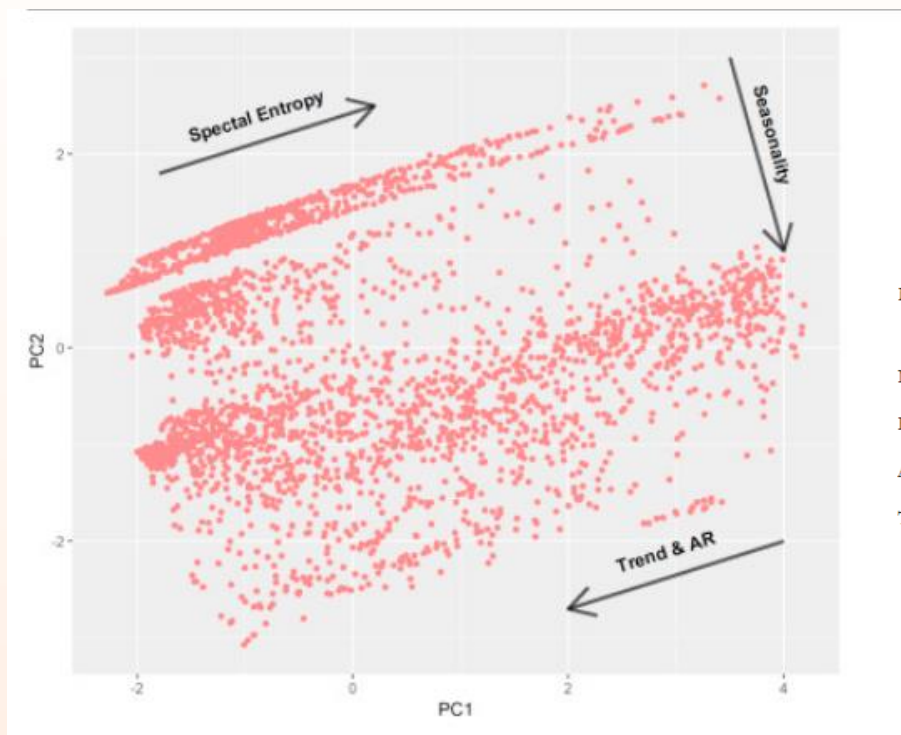
- Ετήσια, τριμηνιαία, μηνιαία, εβδομαδιαία, ημερήσια, ωριαία κλπ.
- Ο τύπος των δεδομένων σχετίζεται άμεσα με τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς
- Τα ετήσια δεδομένα περιέχουν συνήθως περιορισμένη τυχαιότητα και ως εκ τούτου ακόμα και απλές μέθοδοι μπορούν να αποδώσουν ικανοποιητικά. Κυριαρχεί η τάση και ο κύκλος.
- Στα τριμηνιαία και μηνιαία δεδομένα η τυχαιότητα είναι μεγαλύτερη και κυριαρχεί η τάση και η εποχιακότητα. Σε τέτοιες περιπτώσεις προτιμώνται πιο εξελιγμένες μέθοδοι πρόβλεψης.
- Στα ημερήσια και ωριαία δεδομένα η τυχαιότητα κυριαρχεί αφού η τάση σπανίως είναι σημαντική. Σε τέτοιες περιπτώσεις προτιμώνται μέθοδοι εξομάλυνσης που μπορούν να λάβουν υπόψη τους ενδεχομένως πολλαπλούς κύκλους εποχιακότητας.

Επιλογή μεθόδου με βάση τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς Εποχιακότητα, Τάση, Κύκλος και Τυχαιότητα

- Γνωρίζουμε ότι η εποχιακότητα μπορεί να προβλεφθεί αρκετά ικανοποιητικά. Η απλούστερη μέθοδος για την εκτίμησή της είναι η μέθοδος της αποσύνθεσης.
- Αφού η εποχιακότητα δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο πρόβλημα, κλειδί για την επιλογή μιας μεθόδου είναι το μέγεθος της τυχαιότητας και η συμπεριφορά της τάσης - κύκλου.
- Γενικότερα, όταν υπάρχει μεγάλη τυχαιότητα, τότε επιλέγουμε συνήθως απλούστερες μεθόδους.
- Αν η τυχαιότητα υπερσχύει της τάσης - κύκλου, συνήθως σε βραχυπρόθεσμες προβλέψεις, καταλληλότερη είναι η εκθετική εξομάλυνση.
- Στην περίπτωση μικρής τυχαιότητας καταλληλότερη μέθοδος είναι τα μοντέλα ARIMA.
- Όταν υπάρχει ελάχιστη τυχαιότητα και η τάση επικρατεί των κυκλικών διακυμάνσεων προτιμάται η μέθοδος Holt.

Επιλογή μεθόδου με βάση τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς Εποχιακότητα, Τάση, Κύκλος και Τυχαιότητα

Are forecasting competitions data representative of
the reality? (Spiliotis et al., 2020)



$$MASE_i = aF1_i + bF2_i + cF3_i + \dots$$

Method	Forecastability	Trend	Seasonality	Frequency	Linearity	Stability	Skewness	Kurtosis
Naive 2	0.05	0.07	-0.02	-0.26	-0.06	-0.01	0.13	-0.08
ETS	0.05	0.00	-0.04	-0.22	-0.06	0.00	0.13	-0.06
ARIMA	0.05	0.00	-0.04	-0.23	-0.05	0.00	0.14	-0.05
Theta	0.04	0.01	-0.02	-0.24	-0.04	-0.01	0.13	-0.06

Επιλογή μεθόδου με βάση τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς Εποχιακότητα, Τάση, Κύκλος και Τυχαιότητα

‘Horses for Courses’ in demand forecasting
(Petropoulos et al., 2014)

Method	Seasonality	Trend	Cycle	Randomness	Number of observations	Forecasting Horizon
Naïve	✗ ✗ ✗	✗	✗	✗ ✗		✗
Naïve 2	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗
Single	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗
Holt	✗		✗ ✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗ ✗
Damped	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗
Holt-Winters	✗		✗ ✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗ ✗
Theta	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗
Linear Trend	✗	✓	✗ ✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗	✗	✗
Autobox	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗
Forecast Pro	✗	✗	✗ ✗	✗ ✗ ✗ ✗ ✗	✓	✗ ✗

Ορίζοντας και συχνότητα πρόβλεψης

- Επιλέγουμε τη μέθοδο ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης (αριθμός προβλέψεων)

Μεγαλύτερος αριθμός προβλέψεων απαιτείται συνήθως σε ημερήσια δεδομένα από ότι σε μηνιαία ή σε μηνιαία από ότι σε τριμηνιαία, κοκ.

- Από μία πιο πρακτική σκοπιά, όσο μεγαλύτερος αριθμός προβλέψεων απαιτείται και όσο πιο συχνά αυτές χρειάζονται, τόσο απλούστερες και περισσότερο αυτοματοποιημένες μέθοδοι χρησιμοποιούνται. Το ίδιο ισχύει όταν η πρόβλεψη αναφέρεται σε μεγάλο πλήθος χρονοσειρών.

Ορίζοντας και συχνότητα πρόβλεψης

- Βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη (Operations)
 - ✓ Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης < 3 περιόδους
 - ✓ Εκθετική εξομάλυνση (SES-Holt), ARIMA και Naïve
- Μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη (Budget - Οικονομικός Σχεδιασμός)
 - ✓ Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης $\sim 1-1.5$ οικονομικό έτος (δλδ 12-18, αν αναφερόμαστε σε μηνιαία δεδομένα)
 - ✓ Εκθετική εξομάλυνση (Damped) και Theta
- Μακροπρόθεσμη πρόβλεψη (Strategy- Σχεδιασμός Επενδύσεων και Ανάπτυξης)
 - ✓ Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης ≥ 3 έτη
 - ✓ Μοντέλα παλινδρόμησης

Παράγοντες Σφαλμάτων

Ορισμένοι παράγοντες αυξάνουν το μέγεθος των σφαλμάτων όταν οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται μεμονωμένα και όχι σε συνδυασμό. Τέτοιοι παράγοντες είναι :

- Υπολογισμός λάθος μεγέθους. Για παράδειγμα, χρειάζεται να προβλέψουμε τη ζήτηση, όμως δεδομένα ζήτησης συνήθως δεν υπάρχουν. Αντί αυτού υπολογίζουμε προβλέψεις όπως παραγγελιών, παραγωγής, φορτώσεων και χρεωστικών λογαριασμών.
- Αλλαγές προτύπου και μη σταθερές σχέσεις. Οι στατιστικές μέθοδοι υποθέτουν ότι τα πρότυπα και οι σχέσεις είναι σταθερές, κάτι σπάνιο στον πραγματικό κόσμο. Παρόλα αυτά, συγκεκριμένα γεγονότα και κύκλοι, φέρνουν συστηματικές αλλαγές και επομένως είναι δυνατόν να αποφευχθούν συστηματικά σφάλματα.
- Μέθοδοι που ελαχιστοποιούν σφάλματα. Οι μέθοδοι πρόβλεψης συνήθως επιλέγονται με σκοπό να ελαχιστοποιήσουν το σφάλμα της αμέσως επόμενης πρόβλεψης. Όμως χρειαζόμαστε προβλέψεις για αρκετές χρονικές περιόδους μπροστά, οι οποίες συνήθως δεν είναι οι κατάλληλες αν έχουν επιλεγθεί με την λογική της ελαχιστοποίησης του σφάλματος της ακριβώς επόμενης εκτίμησης.

Αξιολόγηση προβλέψεων

Goodness-of-fit (in-sample MAE - MSE):

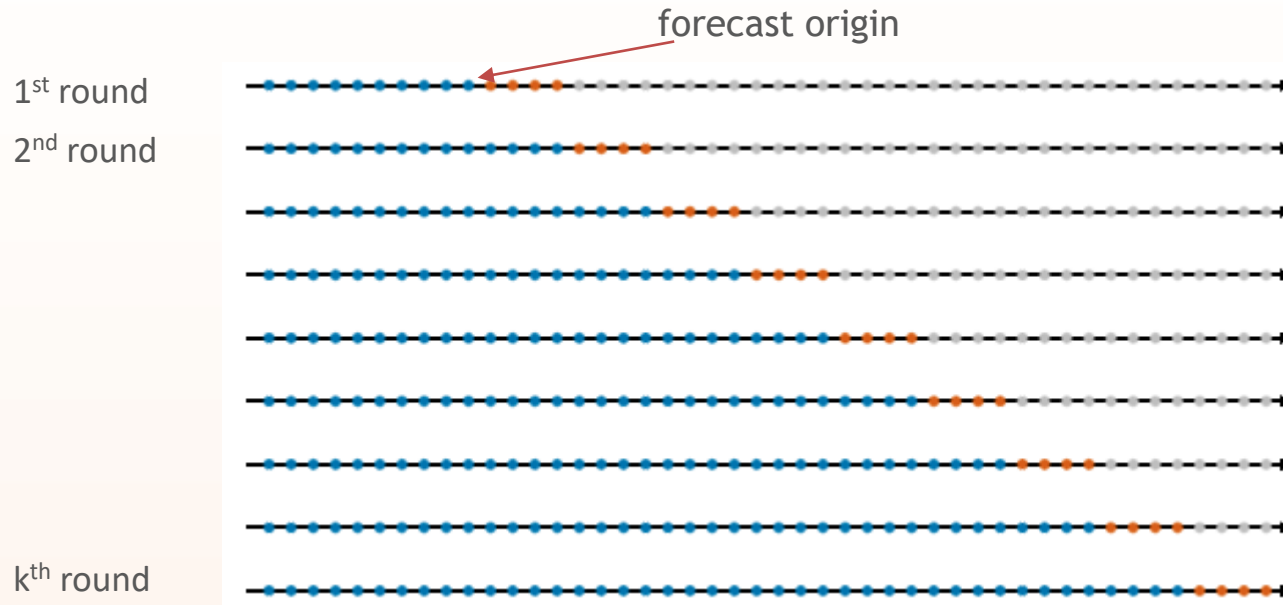
- i. Εύκολοι και γρήγοροι υπολογισμοί
- ii. Συνήθως αναφέρεται στην ικανότητα πρόβλεψης της επόμενης περιόδου και ως εκ τούτου ενδέχεται να μην αντικατοπτρίζει την απόδοση της μεθόδου για πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις
- iii. Βασίζεται σε in-sample σφάλματα τα οποία δείχνουν πόσο καλά προσαρμόζεται το μοντέλο μας στα δεδομένα και όχι πόσο καλά τα προβλέπει στην πραγματική ζωή - Πιθανή υπερπροσαρμογή (overfitting)

Information criteria (AIC - AICc - BIC):

- Συνεχίζει να παρουσιάζει το πλεονέκτημα (i) και το μειονέκτημα (ii) της προηγούμενης προσέγγισης
- Επιλύει σε κάποιο βαθμό το πρόβλημα (iii) εισάγοντας μία λογική penalty στη διαδικασία επιλογής βάσει της πολυπλοκότητας του μοντέλου (πλήθος παραμέτρων). Ωστόσο, αυτή η πολυπλοκότητα αποτελεί ένδειξη και όχι απόδειξη υπερπροσαρμογής, με αποτέλεσμα συχνά να επιλέγουμε απλούστερα μοντέλα απ' ότι πραγματικά χρειαζόμαστε.

Αξιολόγηση προβλέψεων

Rolling origin evaluation (out-of-sample MAE - MSE): Το «φυσικό ανάλογο» μιας διαδικασίας cross-validation σε δεδομένα χρονοσειρών. Η επιλογή μας βασίζεται σε out-of-sample μετρήσεις σφαλμάτων και ως εκ τούτου είναι πιο αντικειμενική.



- Το παράθυρο πρόβλεψης περιέχει τόσες παρατηρήσεις όσες και ο ορίζοντας πρόβλεψης (h) για τον οποίο η μέθοδό μας θα κληθεί να παράγει προβλέψεις στην πραγματική ζωή
- Το forecast origin ανανεώνεται συνήθως κατά 1 ή h παρατηρήσεις, ανάλογα με το πλήθος των διαθέσιμων παρατηρήσεων και τους περιορισμούς που υπάρχουν σε υπολογιστικό κόστος

Συνδυασμός μεθόδων

Παράδειγμα συνδυασμού μεθόδων

- Έχουμε τρεις μέθοδοι εξομάλυνσης :
 - Απλής εκθετικής εξομάλυνσης
 - Μοντέλο γραμμικής τάσης (Holt)
 - Μοντέλο μη γραμμικής τάσης (Damped)

- Δύο είδη συνδυασμού των μεθόδων:
 - Βέλτιστος (optimal) (τα βάρη των τριών μεθόδων δίνονται από μια αντίστροφη συνάρτηση του MSE)
 - Απλός (single) (είναι ο μ.ο. των τριών μεθόδων)

Συνδυασμός μεθόδων

Period	Time Series	Single	Holt	Damped	Optimal Combination	Simple Combination
Model fit forecasts						
1	376	492	367	365	403	408
2	324	457	375	369	397	401
3	341	417	364	367	380	383
4	444	394	361	362	371	373
5	450	409	394	368	390	391
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
44	603	563	578	592	578	578
45	694	575	592	590	586	585
46	542	611	631	599	599	599
48	735	581	596	595	591	591
Model fit errors						
Mean Error or Bias		9.37	1.57	17.77	9.48	9.57
MSE		4278.75	3501.39	3625.17	3540.61	3564.40
MAPE		11.39	10.23	10.40	10.49	10.54
Post-sample forecasts						
49	628	627	648	607	628	627
50	676	627	653	615	632	632
51	629	627	659	620	636	635
52	600	627	664	623	639	638
53	654	627	670	625	642	641
54	661	627	675	627	644	643
55	606	627	580	628	647	645
56	660	627	686	629	649	647
57	665	627	691	629	651	649
58	595	627	696	629	653	651
59	621	627	702	630	655	653
60	723	627	707	630	657	655
61	608	627	713	640	659	657
62	728	627	718	630	661	658
63	650	627	723	630	663	660
Post-sample errors						
Mean Error or Bias		19.64	-38.79	21.58	-0.67	0.81
MSE		1945.98	3116.47	2003.52	1468.48	1468.76
MAPE		5.21	6.87	5.59	4.85	4.84

Προβλέψεις των τριών μεθόδων
και των συνδυασμών τους

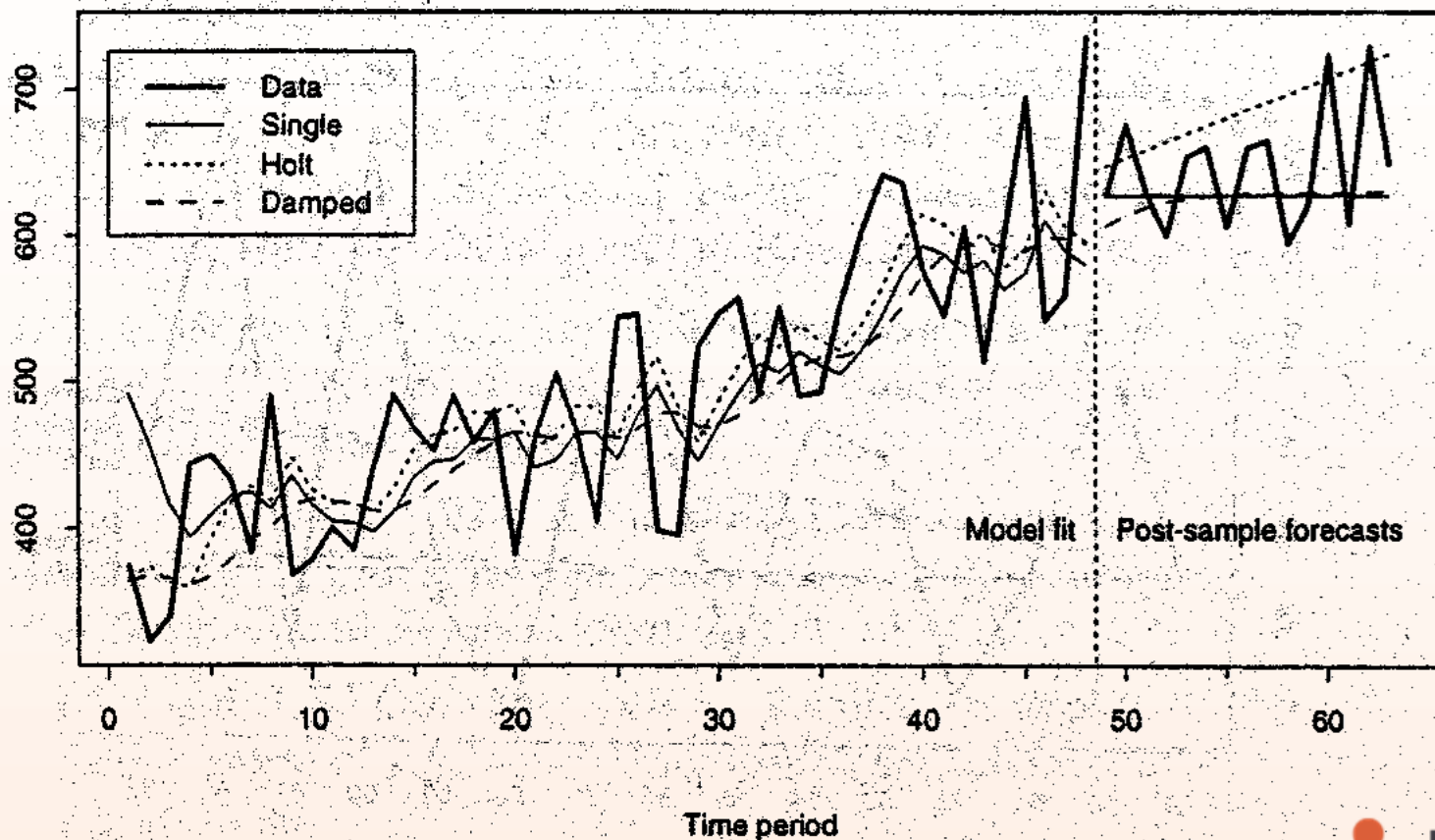
Συνδυασμός μεθόδων

Παρατηρήσεις

- Στον πίνακα εμφανίζονται το Μέσο τετραγωνικό σφάλμα MSE και το Μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα MAPE.
- Παρατηρούμε ότι στο fit model το MSE είναι :
 - το μικρότερο στην Holt, μετά στην Damped και μετά στην απλή εκθετική
 - μικρότερο στον βέλτιστο συνδυασμό από τον απλό.
- Παρατηρούμε ότι στο post-sample το MSE είναι:
 - το μικρότερο στον βέλτιστο συνδυασμό από όλες τις μεθόδους και συνδυασμούς.
 - το μικρότερο στην απλή εκθετική από τις άλλες δύο μεθόδους, ενώ ήταν το μεγαλύτερο στο fit model.

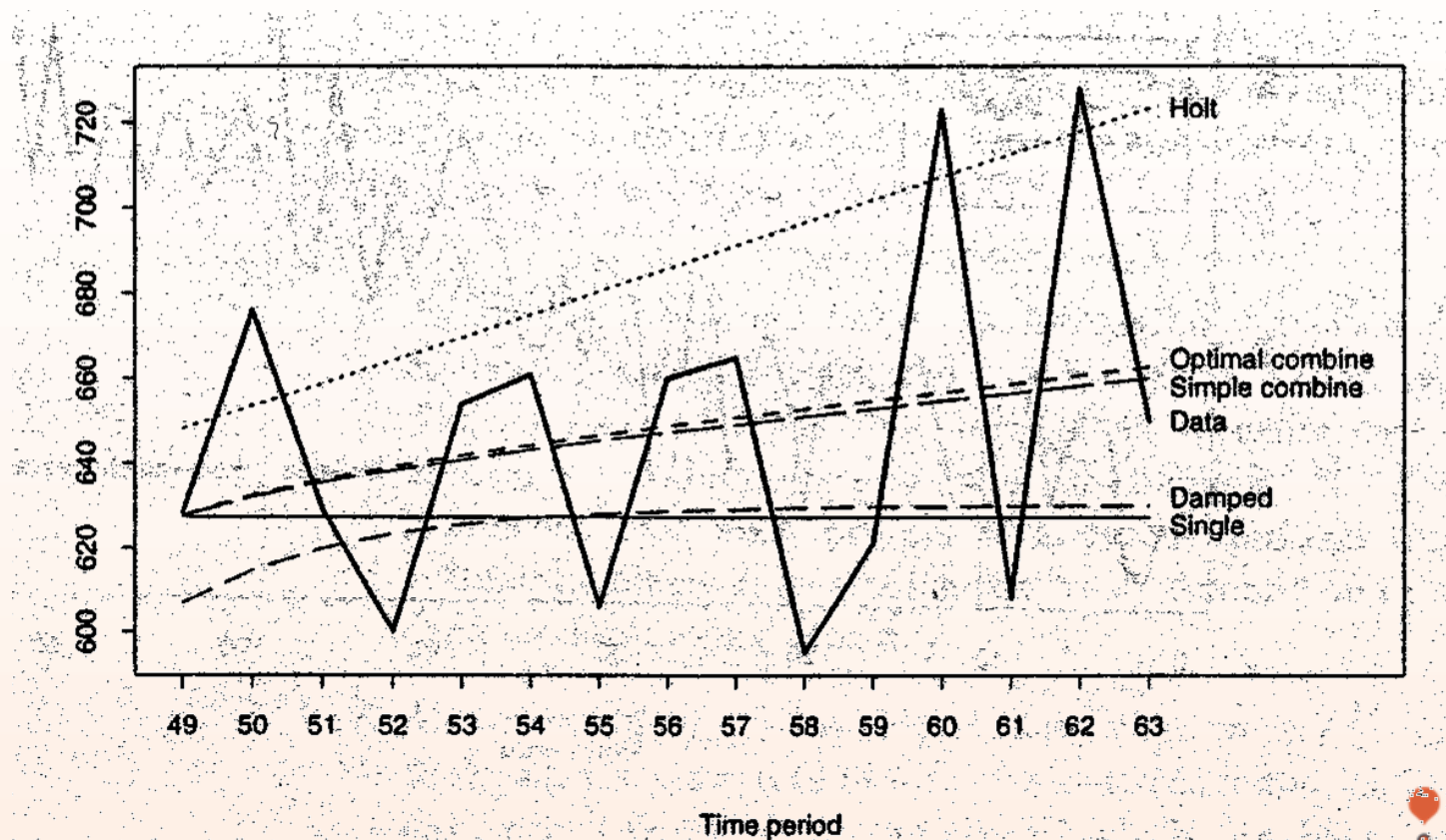
Συνδυασμός μεθόδων

Γράφημα των προβλέψεων των τριών μεθόδων και των συνδυασμών τους



Συνδυασμός μεθόδων

Γράφημα των προβλέψεων των τριών μεθόδων και των συνδυασμών τους στο Post Sample



Συνδυασμός μεθόδων

- Ο συνδυασμός των μεθόδων μας επιτρέπει να είμαστε πιο ακριβής στις προβλέψεις μας και μειώνει την αβεβαιότητα μας για το μέλλον όταν δεν είμαστε σίγουροι αν τα δεδομένα θα συνεχίσουν να μοιάζουν ως προς τα μοτίβα τους με τα δεδομένα του παρελθόντος (*model & data uncertainty*).
- Στην ουσία, τα σφάλματα των μεθόδων αλληλοαναιρούνται σε κάποιο βαθμό με αποτέλεσμα οι προβλέψεις μας να βελτιώνονται συνολικά. Το σφάλμα του συνδυασμού των μεθόδων είναι δηλαδή συνήθως μικρότερο από το μέσο όρο των σφαλμάτων των επιμέρους μοντέλων.
- Ο συνδυασμός μεθόδων αποδίδει καλύτερα όταν οι μέθοδοι είναι αρκετοί σε πλήθος και διαφορετικοί ως προς τη φύση τους, τον τρόπο δηλαδή που «σκέφτονται» για να παράγουν προβλέψεις.
- Το παραπάνω συμπέρασμα έχει επιβεβαιωθεί από όλους τους διαγωνισμούς προβλέψεων M.

Παρακολούθηση

1 από 3

- Η επίδραση σημαντικών αλλαγών στη ζήτηση προϊόντων και υπηρεσιών, που προέρχονται για παράδειγμα από νέα προϊόντα της αγοράς ή αλλαγές στον πληθυσμό και τις καταναλωτικές συνήθειες, αποτελούν μία πολύ σημαντική επιχειρηματική δραστηριότητα που αποσκοπεί είτε στην ελαχιστοποίηση πιθανού κόστους ή στη μεγιστοποίηση του κέρδους μέσω εκμετάλλευσης ευκαιριών.
- Σε κάθε περίπτωση, οι επιχειρηματίες καλούνται να λάβουν αποφάσεις που θα έχουν ως αποτέλεσμα τη διακοπή της κανονικής παραγωγικής λειτουργίας και την αναδιάρθρωση των υπαρχόντων πόρων.
- Η παρακολούθηση των χρονοσειρών έχει ως στόχο την αυτόματη ανίχνευση σημαντικών αλλαγών στο πρότυπο της χρονοσειράς (όπως για παράδειγμα, απότομες αυξήσεις ή μειώσεις) καθώς νέα δεδομένα γίνονται διαθέσιμα, όσο το δυνατόν συντομότερα από τη στιγμή που αυτές πραγματοποιούνται και με όσο το δυνατόν λιγότερες εσφαλμένες ανιχνεύσεις.
- Συνήθως, οι εφαρμογές παρακολούθησης γίνονται σε μεγάλο πλήθος χρονοσειρών, οπότε η χρήση αυτοματοποιημένων μεθόδων που προσφέρουν χαμηλό κόστος παρακολούθησης φαντάζει επιτακτική.
- Οι επισημασμένες χρονοσειρές μελετώνται συνήθως περαιτέρω προκειμένου να συντελεσθούν οι απαραίτητες επιχειρηματικές ενέργειες.

Παρακολούθηση

2 από 3

Η παρακολούθηση των χρονοσειρών είναι άμεσα συνυφασμένη με το πεδίο των προβλέψεων για δύο κυρίως λόγους.

1. Πρώτον, η ανίχνευση αλλαγών βασίζεται κυρίως στο σφάλμα ακρίβειας που προέκυψε από την προέκταση της χρονοσειράς στο μέλλον. Αρκετές έρευνες μελετούν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της ακρίβειας πρόβλεψης χρονοσειρών και της επιτυχίας ανίχνευσης σημαντικών αλλαγών στο πρότυπο της χρονοσειράς.
2. Δεύτερον, η παρακολούθηση των χρονοσειρών είναι (ή θα πρέπει να είναι) βασική συνιστώσα στα συστήματα επιχειρηματικών προβλέψεων που εγκαθίστανται στις επιχειρήσεις, καθώς, όταν η εφαρμογή απλών προβλεπτικών μεθόδων καταλήγει σε μεγάλα σφάλματα πρόβλεψης, απαιτούνται επιχειρηματικές παρεμβάσεις.

Δεν είναι τυχαίο το γεγονός πως η εξέλιξη των μεθόδων παρακολούθησης ήταν κυρίως έργο ερευνητών που προέρχονταν από το πεδίο των προβλέψεων

Παρακολούθηση

3 από 3

- Βασικός στόχος της πρόβλεψης είναι η εκτίμηση της μελλοντικής μέσης τιμής, λαμβάνοντας υπόψη την τάση, μέσω κατάλληλων παραμέτρων του μοντέλου, και υποθέτοντας πως δε θα συντελεστεί για το ζητούμενο ορίζοντα πρόβλεψης κάποια σημαντική (διαρθρωτική) αλλαγή στο πρότυπο των δεδομένων.
- Όταν παρατηρηθεί ένα σχετικά μεγάλο σφάλμα στη σειρά των προβλέψεων ή όταν μία σειρά από συνεχόμενα σφάλματα έχουν την ίδια κατεύθυνση (το ίδιο πρόσημο), δηλώνοντας με τον τρόπο αυτό πρόβλεψη που χαρακτηρίζεται από μεροληψία, είναι αρκετά πιθανή η ύπαρξη μιας αλλαγής στο πρότυπο της χρονοσειράς, η οποία χρήζει περαιτέρω έρευνας και ελέγχου από τη σκοπιά του αναλυτή και φυσικά του διευθυντή.
- Οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης θα προσαρμόσουν τις προβλέψεις τους με καθυστέρηση μίας περιόδου έπειτα από την ολοκλήρωση της αλλαγής του προτύπου, αλλά τα σφάλματα της πρόβλεψης στις ενδιάμεσες περιόδους είναι αρκετά ώστε να επιτευχθεί η ανίχνευση της διαρθρωτικής αλλαγής στο πρότυπο των δεδομένων.

Μέθοδος Παρακολούθησης Brown

Η μέθοδος Brown k -περιόδων για την περίοδο n υπολογίζεται ως το απόλυτο πηλίκο του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης της περιόδου n και των $k-1$ προηγούμενων περιόδων προς την εκθετικά εξομαλυμένη μέση απόκλιση των απόλυτων σφαλμάτων στην περίοδο n , ως εξής:

$$\begin{aligned}\text{Brown}_k &= \left| \frac{\text{CUSUM}_n^k}{\text{MAD}_n} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{t=n-k+1}^n e_t}{(1-\beta)^n \cdot e_0 + \sum_{t=1}^n \beta \cdot (1-\beta)^{n-t} \cdot |e_t|} \right|\end{aligned}$$

- Όπου β είναι η παράμετρος εξομάλυνσης του παρανομαστή για τη μέθοδο του Brown.
- Επίσης, το e_0 αποτελεί την αρχικοποίηση για το δείκτη MAD και υπολογίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$e_0 = \frac{\sum_{t=1}^6 |e_t|}{6}$$

Μέθοδος Παρακολούθησης Brown

- Η μέθοδος που προτάθηκε αρχικά από τον Brown (1959; 1963) πρότεινε τον υπολογισμό του δείκτη *CUSUM* για το σύνολο των περιόδων της χρονοσειράς (από την αρχή αυτής).
- Όμως, ο Trigg (1964) παρατήρησε πως, αν δε συντελεστεί επαναφορά του δείκτη *CUSUM* αμέσως μετά από μία σημαντική αλλαγή του προτύπου της χρονοσειράς, ενδέχεται η μέθοδος να παράγει ως έξοδο λανθασμένες ανιχνεύσεις σημαντικών αλλαγών, αφού το συσσωρευτικό άθροισμα θα περιλαμβάνει τα μεγάλα σφάλματα που υπολογίστηκαν στις προηγούμενες περιόδους.
- Αυτή ακριβώς η παρατήρηση αποτέλεσε και την πρωταρχική ώθηση για την ανάπτυξη της μεθόδου παρακολούθησης του Trigg, η οποία ενσωματώνει εκθετική εξομάλυνση και στον αριθμητή, προκειμένου να μειώνει σημαντικά την επίδραση σφαλμάτων πρόβλεψης παλαιότερων χρονικών περιόδων.
- Παρά ταύτα, προτάθηκαν κατά καιρούς και άλλες μέθοδοι βασισμένες στον υπολογισμό του δείκτη *CUSUM* για ένα ή περισσότερα εύρη δεδομένων (k), σε αντίθεση με ένα άθροισμα για το σύνολο των δεδομένων, ώστε να επιλύεται το πρόβλημα της επαναφοράς.
- Οι μέθοδοι αυτές ολοκληρώνονται με ταυτόχρονο υπολογισμό και παρακολούθηση πολλών δεικτών $Brown_k$, ανάλογα με τον αριθμό των μηκών των χρονικών διαστημάτων που επιλέγονται προς παρακολούθηση. Η τιμή της παραμέτρου k συνήθως κυμαίνεται από μία έως πέντε χρονικές περιόδους.

Μέθοδος Παρακολούθησης Trigg

- Η μέθοδος παρακολούθησης του Trigg προκύπτει από αντικατάσταση του δείκτη *CUSUM* στον αριθμητή της μεθόδου Brown με ένα εκθετικά εξομαλυμένο άθροισμα σφαλμάτων πρόβλεψης E_n :

$$\begin{aligned}\text{Trigg}_n &= \left| \frac{E_n}{\text{MAD}_n} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{t=1}^n \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-t} \cdot e_t}{(1 - \beta)^n \cdot e_0 + \sum_{t=1}^n \beta \cdot (1 - \beta)^{n-t} \cdot |e_t|} \right|\end{aligned}$$

- Όπου α είναι η παράμετρος εξομάλυνσης του αριθμητή.
- Όπως αναφέρθηκε, η εξομάλυνση στον αριθμητή επιτρέπει στο δείκτη να εφαρμόζει μειωμένα βάρη στα σφάλματα καθώς μεγαλώνει η χρονική τους υστέρηση από τις τρέχουσες περιόδους.
- Η αλλαγή αυτή προκαλεί στο δείκτη αυτόματη επαναφορά, με μία μικρή χρονική υστέρηση, μετά την ανίχνευση της αλλαγής του προτύπου.
- Αξίζει να σημειωθεί πως η μέθοδος του Trigg με παράμετρο εξομάλυνσης αριθμητή $\alpha=1$ συμπίπτει με την μέθοδο του Brown αν θέσουμε $k=1$.

Παράμετροι εξομάλυνσης

- Αναφορικά με τις τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροι εξομάλυνσης α και β των μεθόδων παρακολούθησης, οι Gardner (1983) και Golder και Settle (1976) αρχικά πρότειναν να λαμβάνουν την ίδια τιμή, ίση με τη βέλτιστη παράμετρο εξομάλυνσης για τη μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης σταθερού επιπέδου.
- Επίσης, εξετάσθηκε η περίπτωση να διαφέρουν από την παράμετρο εξομάλυνσης της πρόβλεψης, αλλά να εξακολουθούν να λαμβάνουν μία κοινή τιμή (Gardner, 1985).
- Η έρευνα του McClain (1988), τέλος, έδειξε πως η επιλογή διαφορετικών παραμέτρων εξομάλυνσης σε αριθμητή και παρανομαστή έχει γενικά καλύτερα αποτελέσματα, συνιστώντας χαμηλότερες τιμές για την παράμετρο β .
- Γενικά, οι παράμετροι εξομάλυνσης α και β επιλέγονται ούτως ώστε:

$$0,05 \leq \alpha \leq 1$$

$$0,05 \leq \beta \leq 0,5$$

$$\beta \leq \alpha$$

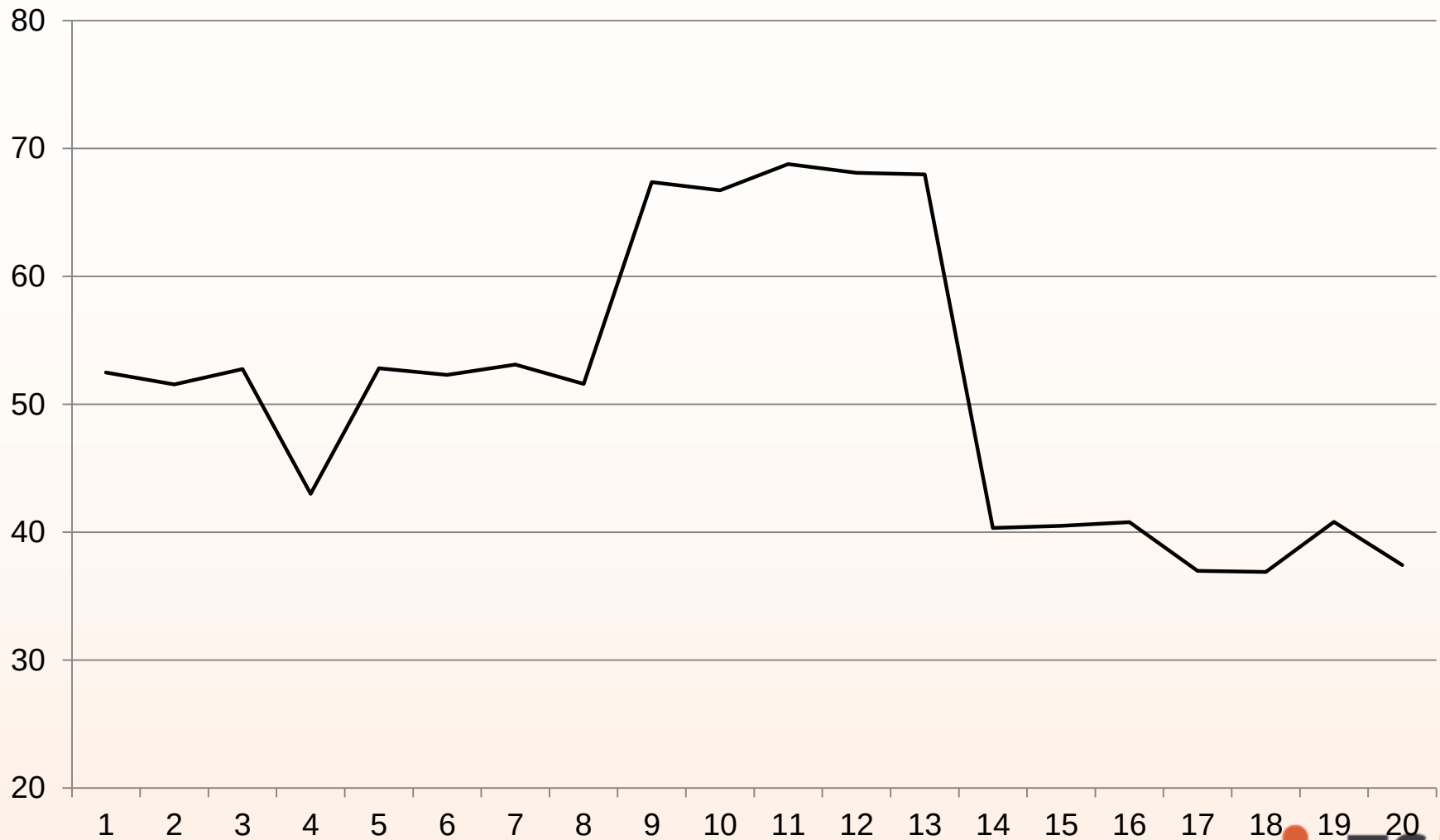
Ανίχνευση αλλαγών

- Η ανίχνευση σημαντικών αλλαγών, σύμφωνα με τις μεθόδους των Brown και Trigg, επιτυγχάνεται για τη χρονική περίοδο όπου ο δείκτης που υπολογίζεται σύμφωνα με κάθε μέθοδο υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο (κατώφλι ή *threshold*) ενεργοποίησης.
- Η αλλαγή της τιμής του ορίου αυτού συνεπάγεται τροποποίηση της ευαισθησίας της εκάστοτε μεθόδου.
- Στην πράξη, εφαρμόζονται συνήθως οι ακόλουθες σχέσεις ενεργοποίησης, ανάλογα με την επιλεγμένη μέθοδο παρακολούθησης:

if ($\text{Brown}_k > 0.5$) then "*Structural Change Detected*"

if ($\text{Trigg} > 0.5$) then "*Structural Change Detected*"

Παράδειγμα



Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Προβλέψεις
t/n	Y_t	F_t
1	52,474	52,256
2	51,543	52,365
3	52,749	51,954
4	43,000	52,352
5	52,806	47,676
6	52,298	50,241
7	53,092	51,269
8	51,583	52,181
9	67,362	51,882
10	66,731	59,622
11	68,770	63,177
12	68,079	65,973
13	67,968	67,026
14	40,321	67,497
15	40,491	53,909
16	40,790	47,200
17	36,985	43,995
18	36,897	40,490
19	40,801	38,693
20	37,441	39,747

Μ.Ο. παρατηρήσεων 1:3, $\alpha=0.5$

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

$$F_{t+1} = \alpha \cdot Y_t + (1 - \alpha) \cdot F_t$$

Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Προβλέψεις	Σφάλματα
t/n	Y_t	F_t	e_t
1	52,474	52,256	0,219
2	51,543	52,365	-0,822
3	52,749	51,954	0,795
4	43,000	52,352	-9,352
5	52,806	47,676	5,130
6	52,298	50,241	2,057
7	53,092	51,269	1,823
8	51,583	52,181	-0,598
9	67,362	51,882	15,480
10	66,731	59,622	7,110
11	68,770	63,177	5,593
12	68,079	65,973	2,106
13	67,968	67,026	0,942
14	40,321	67,497	-27,176
15	40,491	53,909	-13,418
16	40,790	47,200	-6,411
17	36,985	43,995	-7,010
18	36,897	40,490	-3,593
19	40,801	38,693	2,107
20	37,441	39,747	-2,306

$$e_i = Y_i - F_i$$

Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Σφάλματα	Αριθμητής
t/n	Y_t	e_t	E_n
1	52,474	0,219	0,044
2	51,543	-0,822	-0,129
3	52,749	0,795	0,056
4	43,000	-9,352	-1,826
5	52,806	5,130	-0,435
6	52,298	2,057	0,064
7	53,092	1,823	0,415
8	51,583	-0,598	0,213
9	67,362	15,480	3,266
10	66,731	7,110	4,035
11	68,770	5,593	4,347
12	68,079	2,106	3,898
13	67,968	0,942	3,307
14	40,321	-27,176	-2,790
15	40,491	-13,418	-4,915
16	40,790	-6,411	-5,214
17	36,985	-7,010	-5,573
18	36,897	-3,593	-5,177
19	40,801	2,107	-3,720
20	37,441	-2,306	-3,438

$$\text{Trigg}_n = \left| \frac{E_n}{\text{MAD}_n} \right|$$

$$= \left| \frac{\sum_{t=1}^n \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-t} \cdot e_t}{(1 - \beta)^n \cdot e_0 + \sum_{t=1}^n \beta \cdot (1 - \beta)^{n-t} \cdot |e_t|} \right|$$

$$E_1 = \sum_{t=1}^1 \alpha \cdot (1 - \alpha)^{1-t} \cdot e_t = 0,2 \cdot (1 - 0,2)^0 \cdot e_1$$

$$\Rightarrow E_1 = 0,2 \cdot 1 \cdot 0,219 = 0,044$$

$$E_2 = \sum_{t=1}^2 \alpha \cdot (1 - \alpha)^{2-t} \cdot e_t$$

$$= 0,2 \cdot (1 - 0,2)^1 \cdot e_1 + 0,2 \cdot (1 - 0,2)^0 \cdot e_2$$

$$\Rightarrow E_2 = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,219 + 0,2 \cdot 1 \cdot (-0,822) = -0,129$$

Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Σφάλματα	Παρονομαστής
t/n	Y _t	e _t	MAD _n
1	52,474	0,219	2,494
2	51,543	-0,822	2,159
3	52,749	0,795	1,887
4	43,000	-9,352	3,380
5	52,806	5,130	3,730
6	52,298	2,057	3,395
7	53,092	1,823	3,081
8	51,583	-0,598	2,584
9	67,362	15,480	5,163
10	66,731	7,110	5,552
11	68,770	5,593	5,561
12	68,079	2,106	4,870
13	67,968	0,942	4,084
14	40,321	-27,176	8,702
15	40,491	-13,418	9,645
16	40,790	-6,411	8,999
17	36,985	-7,010	8,601
18	36,897	-3,593	7,599
19	40,801	2,107	6,501
20	37,441	-2,306	5,662

$$\text{Trigg}_n = \left| \frac{E_n}{\text{MAD}_n} \right|$$

$$= \left| \frac{\sum_{t=1}^n \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-t} \cdot e_t}{(1 - \beta)^n \cdot e_0 + \sum_{t=1}^n \beta \cdot (1 - \beta)^{n-t} \cdot |e_t|} \right|$$

$$e_0 = \frac{\sum_{t=1}^6 |e_t|}{6} = 3,06$$

$$\text{MAD}_1 = (1 - \beta)^1 \cdot e_0 + \sum_{t=1}^1 \beta \cdot (1 - \beta)^{1-t} \cdot |e_t|$$

$$\Rightarrow \text{MAD}_1 = 0,8 \cdot 3,06 + 0,2 \cdot (1 - 0,2)^0 \cdot |0,219| = 2,494$$

$$\text{MAD}_2 = (1 - \beta)^2 \cdot e_0 + \sum_{t=1}^2 \beta \cdot (1 - \beta)^{2-t} \cdot |e_t|$$

$$\Rightarrow \text{MAD}_2 = 0,8^2 \cdot 3,06 + 0,2 \cdot (1 - 0,2)^1 \cdot |0,219|$$

$$+ 0,2 \cdot (1 - 0,2)^0 \cdot |-0,822| = 2,159$$

Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Αριθμητής	Παρονομαστής	Δείκτες
t/n	Y_t	E_n	MAD_n	$Trigg_n$
1	52,474	0,044	2,494	0,018
2	51,543	-0,129	2,159	0,060
3	52,749	0,056	1,887	0,029
4	43,000	-1,826	3,380	0,540
5	52,806	-0,435	3,730	0,117
6	52,298	0,064	3,395	0,019
7	53,092	0,415	3,081	0,135
8	51,583	0,213	2,584	0,082
9	67,362	3,266	5,163	0,633
10	66,731	4,035	5,552	0,727
11	68,770	4,347	5,561	0,782
12	68,079	3,898	4,870	0,801
13	67,968	3,307	4,084	0,810
14	40,321	-2,790	8,702	0,321
15	40,491	-4,915	9,645	0,510
16	40,790	-5,214	8,999	0,579
17	36,985	-5,573	8,601	0,648
18	36,897	-5,177	7,599	0,681
19	40,801	-3,720	6,501	0,572
20	37,441	-3,438	5,662	0,607

$$Trigg_n = \left| \frac{E_n}{MAD_n} \right|$$

$$Trigg_1 = \left| \frac{E_1}{MAD_1} \right| = \left| \frac{0,044}{2,494} \right| = 0,018$$

$$Trigg_2 = \left| \frac{E_2}{MAD_2} \right| = \left| \frac{-0,129}{2,159} \right| = 0,060$$

Παράδειγμα

Περίοδος	Δεδομένα	Δείκτες	Ανίχνευση
t/n	Y_t	Trigg _n	
1	52,474	0,018	OXI
2	51,543	0,060	OXI
3	52,749	0,029	OXI
4	43,000	0,540	NAI
5	52,806	0,117	OXI
6	52,298	0,019	OXI
7	53,092	0,135	OXI
8	51,583	0,082	OXI
9	67,362	0,633	NAI
10	66,731	0,727	NAI
11	68,770	0,782	NAI
12	68,079	0,801	NAI
13	67,968	0,810	NAI
14	40,321	0,321	OXI
15	40,491	0,510	NAI
16	40,790	0,579	NAI
17	36,985	0,648	NAI
18	36,897	0,681	NAI
19	40,801	0,572	NAI
20	37,441	0,607	NAI

if (Trigg > 0.5) then "*Structural Change Detected*"

Παράδειγμα

